Μάθημα 20ο: 29/05/2020

* Προσοχή στο ολοκλήρωμα: $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$

Πχ 5.3.1

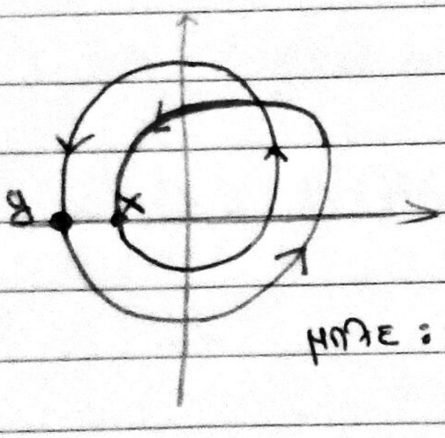
$\gamma(t) = re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \; r>0$

$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$

$\gamma'(t) = i \cdot r e^{it}$

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ όπου $f(z) = \frac{1}{z}$, $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής

ορισμός $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$




$\gamma(a) = x, \; \gamma(t_0) = y, \quad t_0 \in (a, \beta)$

$\gamma(\beta) = x$

μπλε: $\int_{\gamma|[a+\varepsilon, t_0-\varepsilon]} \frac{1}{z}\, dz \; (= \mathrm{Log}|z|) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln|y| + \pi \cdot i - (\ln|x| - \pi \cdot i)$

κόκκινο: $\int_{\gamma|[t_0+\varepsilon, \beta-\varepsilon]} \frac{dz}{z} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln|x| + \pi \cdot i - (\ln|y| - \pi i)$

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} = 4\pi i$

Υπενθύμιση

Η $\frac{1}{z}$ δεν έχει παράγουσα στο $(-\infty, 0]$

* Μπλε + Κόκκινο προκύπτουν με Θεώρημα 5.2.1

Εαν μια κλειστη καμπυλη περιστρεφεται γυρω απο το 0 "m" φορες ειτε με τον μαθηματικο θετικο ειτε με τον μαθηματικο αρνητικο περιστροφο προκυπτει

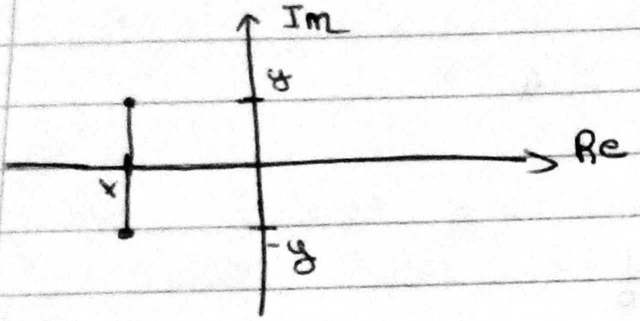
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \pm 2\pi i m$$

Άσκηση 69

$\gamma(t) = x - it$, $t \in [-y, y]$, $x<0$, $y>0$.

Να υπολογισουν $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ και $\int_{\gamma^-} \frac{dz}{z}$

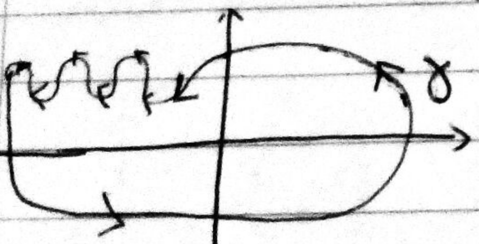
Λύση.




Όταν $t=-y$ τότε: $\gamma(-y) = x + iy$

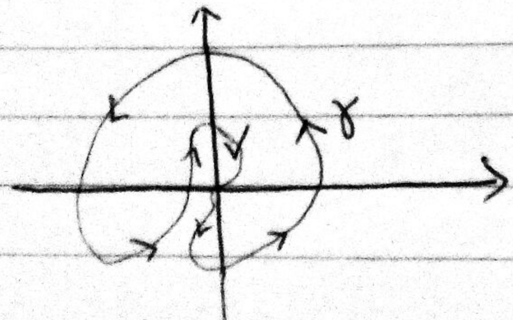
Όταν $t=y$ τότε $\gamma(y) = x - iy$.

Αν περνώντας από πάνω και πάω κάτω κερδίζω $2\pi i$ και από κάτω προς τα πάνω χάνει $2\pi i$. (Σχήματα)

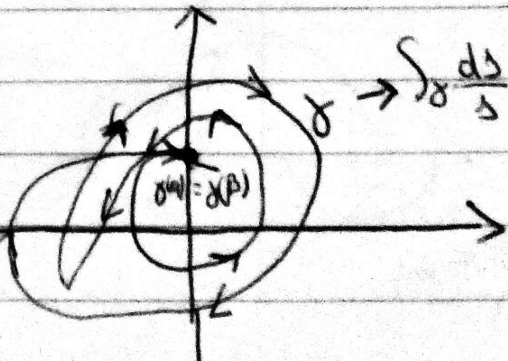



$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.
Άρα οταν γυρνάμε πίσω χάνεται το $2\pi i$




$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

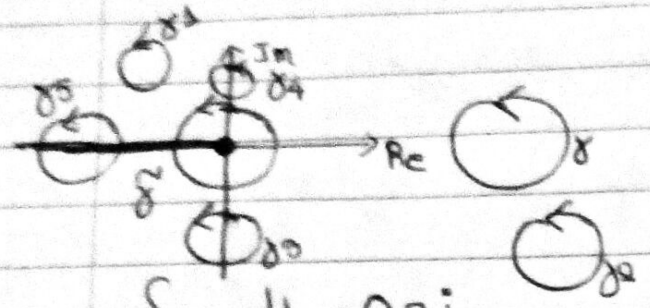



$$\rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$$

Θεώρημα 5.2.1

Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}^*$, μια κλειστή καμπύλη. Τότε ο δείκτης στροφής της "$\gamma$" γύρω από το $0$, είναι ο ακέραιος αριθμός:

$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}.$$



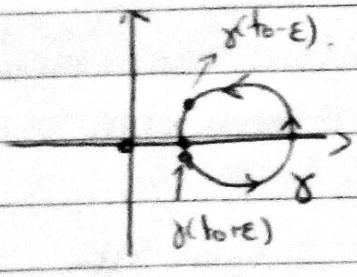

$$\delta_\gamma(0) = 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_i} \frac{dz}{z} = 0, \quad i = 1 \ldots 4.$$

$$\int_{\gamma_5} \frac{dz}{z} = 0 \quad !!!$$

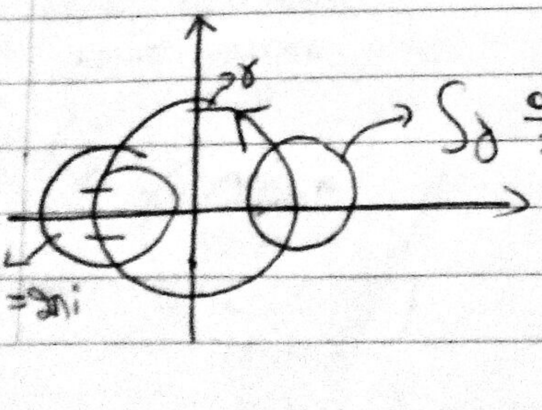
Η $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και <u>ΜΟΝΟ</u>.




Μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα 5.2.1

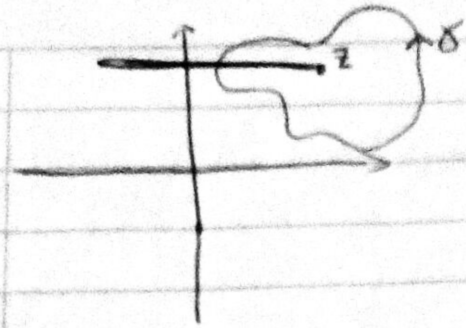
$\rightarrow \int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$

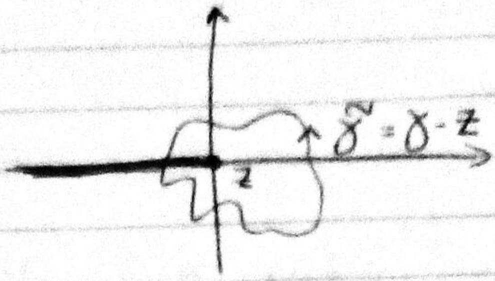
*




$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$

$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$




Έχουμε μία καμπύλη η οποία περιστρέφεται γύρω από το z

$$\int_{\tilde\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_a^\beta \frac{\tilde\gamma'(t)}{\tilde\gamma(t)} = \int_a^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i$$

Εδώ σε αυτό το παράδειγμα.

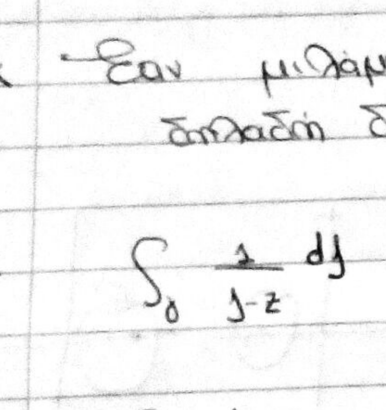
Με $\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 1 \in \mathbb{Z}$

* Εάν μιλάμε για περιστροφή γύρω από ένα σημείο z δηλαδή $\delta_\gamma(z)$ τότε έχω $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$

* $\int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta$ → Έχω πρόβλημα για την: $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta-z}$ ως προς την παράγουσα

$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$ → Έχω πρόβλημα ως προς την παράγουσα της $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$

Π.χ




$\tilde\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\tilde\gamma(t)} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i$$

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i$$

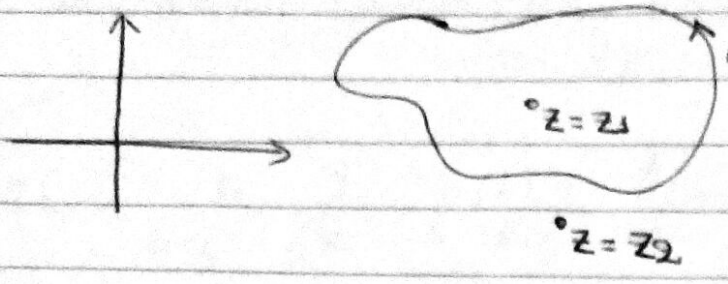
όπου: $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Leftrightarrow \gamma(t) - a = \tilde\gamma(t)$

## Ορισμός

Συνάρτηση του δείκτη στροφής για την καμπύλη γ:

$$\delta_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}$$




γ: κατά τμήματα $C^1$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,\beta])$

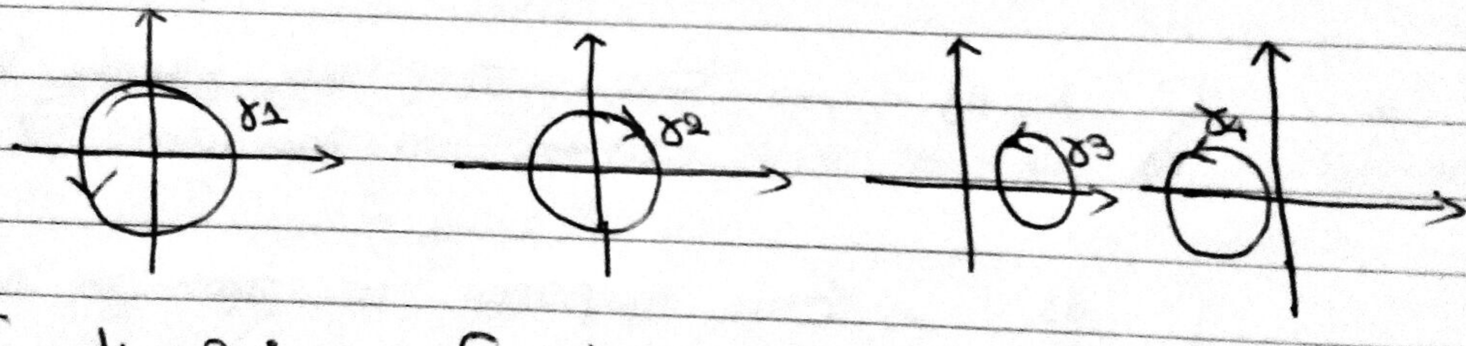
$z \mapsto \underbrace{\delta_\gamma(z)}_{=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}}$

(εδώ : γ: απλή κλειστή)

$\delta_\gamma(z_1)=2\pi i$

$\delta_\gamma(z_2)=0$ (αφού η γ δεν περιστρέφεται γύρω από το $z_2$)

## Υπενθύμιση

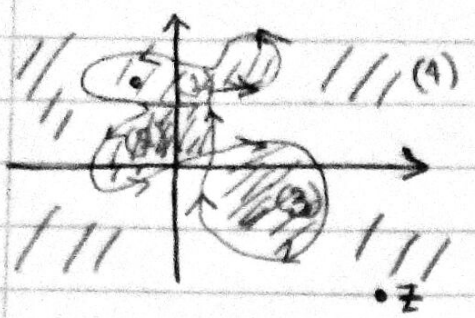



$\int_{\gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta}=2\pi i$ $\qquad$ $\int_{\gamma_2}\frac{d\zeta}{\zeta}=-2\pi i$

$\int_{\gamma_3}\frac{d\zeta}{\zeta}=0$ (Θ.5.2.1) (γιατί δεν περιστρέφονται γύρω από το 0).

$\int_{\gamma_4}\frac{d\zeta}{\zeta}=0$ (αλλά όχι από Θ.5.2.1)

## Θεώρημα 5.3.2




**Για το μπλε (1)**

$\forall z \in (1)$ : $\delta_\gamma(z)=1$ (γιατί μια περιστροφή κάνει)

$\forall z \in (2)$ : $\delta_\gamma(z)=1$

$\forall z \in (3)$ : $\delta_\gamma(z)=1$

$\forall z \in (4)$ : $\underbrace{\delta_\gamma(z)}_{=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}}=0$

Στο θεώρημα λέει η $\delta_\gamma(z)$ συνεχής και σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα της "$\gamma$" και μηδέν για μη φραγμένο κομμάτι της "$\gamma$"

$\forall z=\cdot$ : $\delta_\gamma(z)\in\mathbb{Z}$ = όσες φορές κυκλώσαμε το αντίστοιχο.
(το z είναι εντός στην καμπύλη)

$\forall z=\circ$ : $\delta_\gamma(z)=0$ (το z είναι εκτός της καμπύλης).

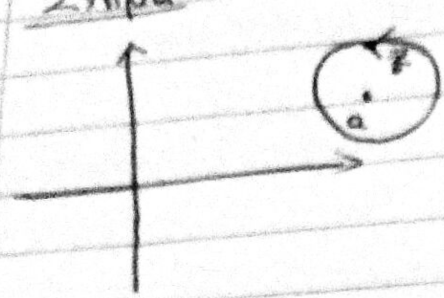
**Π.χ 5.3.4**

$$\delta_{\partial D(a,r)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1, & z\in D(a,r) \\ 0, & C\setminus \overline{D}(a,r)\end{cases}$$

Το πιο σημαντικό!

Προσοχή
όχι a
αλλά z

Σχήμα




Το z δεν είναι απαραίτητα $= a$ ζ

* Η απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων είναι εκτός.

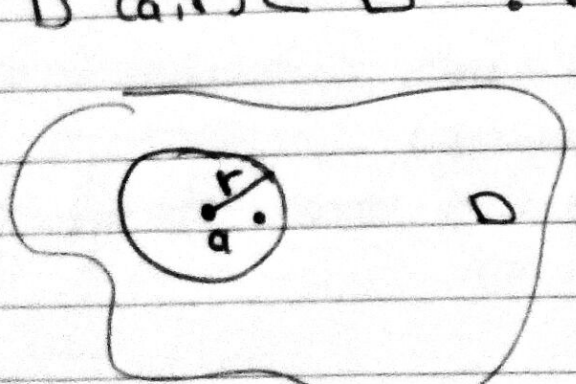
Διάβασμα την Πρόταση 5.3.1 και την απόδειξη της

Στο επόμενο μάθημα θα δούμε: Τύπο Cauchy SOS

Τύπος Cauchy: $D \subset \mathbb{C}$, $D$: ανοικτό

$f: D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε $\forall a \in D$ και

$\overline{D}(a,r) \subset D$ : $\forall z \in D(a,r)$ : $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$




Σχηματικά: Οι τιμές της $f$ πάνω στον κύκλο καθορίζουν πλήρως όλες τις τιμές της $f$ μέσα στον κυκλικό δίσκο.